



# Lógica Computacional

## ICI-242

### PUCV

Franklin Johnson Parejas  
Fjohnsonp@yahoo.es

# 1 Introducción

---

- El Algebra de Boole es una herramienta matemática que permite modelar los llamados Sistemas Digitales.
- Fue desarrollada por el matemático inglés George Boole (1815) y propuesta en un libro llamado “Una Investigación sobre las Leyes del Pensamiento”.

## 2 Axiomas Básicos

- 

<u>a</u> <u>b</u>	<u>a+b</u>	<u>a</u> <u>b</u>	<u>a·b</u>
0 0	0	0 0	0
0 1	1	0 1	0
1 0	1	1 0	0
1 1	1	1 1	1

## 2 Axiomas Básicos

- El Algebra de Boole es un sistema matemático cerrado que consiste en un conjunto  $P$  de dos o mas elementos y dos operaciones llamadas: OR (+) y AND (.) y que cumplen los siguientes axiomas:
  - Ax1 Conmutatividad

$$\forall A, B \in P$$

$$A + B = B + A$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

## ...Axiomas Básicos

---

– Ax2 Asociatividad

$$\forall A, B, C \in P$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

– Ax3 Distributividad

$$\forall A, B, C \in P$$

$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

## ...Axiomas Básicos

---

- Ax4 Existen elementos neutros 0 y 1

$$\forall A \in P$$

$$A + 0 = A$$

$$A \cdot 1 = A$$

- Ax5 Existencia de Complemento

$$\forall A \in P$$

$$A + \overline{A} = 1$$

$$A \cdot \overline{A} = 0$$

# Algebra de Conmutación

---

- Postulado de Huntington: Considera al conjunto  $P$  como

$$P = \{0,1\}$$

- El Postulado de Huntington define un caso especial del Algebra de Boole llamada Algebra de Conmutación.
- De aquí en adelante es esta algebra la que se utilizará para la modelación de los sistemas digitales

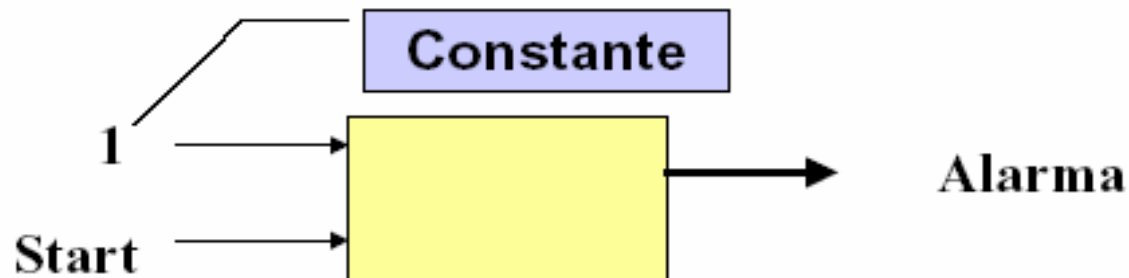
## 3 Definiciones

- **Variable:** Son símbolos que pueden representar cualquier valor de P. El valor de las variables puede cambiar en el transcurso del tiempo. El concepto es igual a variables de los lenguajes de programación.



## ...Definiciones

- **Constante:** Son símbolos que representan sólo un valor de  $P$  para cualquier instante de tiempo. Su concepto es igual a constantes de los lenguajes de programación



## ...Definiciones

- **Expresión de Conmutación:** Es una combinación de un número finito de variables y constantes relacionadas mediante operaciones OR y AND. Para simplificar el uso de paréntesis, se aplican reglas de precedencia de operadores al igual que las expresiones del álgebra normal considerando el OR como suma y el AND como producto.
- Ejemplo

$$A \cdot \bar{B} + \bar{C} + B \cdot \bar{D} + 0 + D$$

## ...Definiciones

- **Literal:** Es toda ocurrencia de una variable, ya sea complementada o sin complementar, en una expresión de conmutación.
- Ejemplo

$$A \cdot \bar{B} + \bar{C} + B \cdot \bar{D} + 0 + D$$

Existen 4 variables: A, B, C y D

Existen 6 literales:

$$A, \bar{B}, \bar{C}, B, \bar{D}, D$$

## ...Definiciones

- **Expresión Dual:** Es la expresión que se obtiene intercambiando las operaciones AND por OR, OR por AND y las constantes 0 por 1 y 1 por 0 en una expresión de conmutación.
- Ejemplo

$$\overline{A} + (B \cdot \overline{C}) + 0 \xrightarrow{\text{Dual}} \overline{A} \cdot (B + \overline{C}) \cdot 1$$

## 4 Teoremas

---

- De los axiomas anteriores se desprenden un conjunto de teoremas. La forma de demostración es:
  - Aplicando axiomas
  - Por inducción
- Se verán un conjunto de teoremas que sirven para trabajar con las expresiones de conmutación dándoles un sentido práctico

## ...Teoremas

---

- Teorema 1: Operaciones básicas

$$1+0=1$$

$$1 \cdot 1=1$$

$$0+0=0$$

$$0 \cdot 1=0$$

Se demuestra aplicando el Axioma 4

$$A+0=A$$

$$A \cdot 1=A$$

## ...Teoremas

- Teorema 2: Operaciones básicas

$$A+1=1$$

$$A \cdot 0=0$$

Se demuestra aplicando Axiomas

$$A + 1 = (A + 1) \cdot 1 = (A + 1) \cdot (A + \overline{A})$$

$$(A + 1) \cdot (A + \overline{A}) = A + (1 \cdot \overline{A}) = 1$$

Luego  $0+1=1$  y  $1+1=1$

## Operaciones AND, OR y NOT

---

**AND**

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

**OR**

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 1$$

**NOT**

$$\bar{0} = 1$$

$$\bar{1} = 0$$

## ...Teoremas

- Teorema 3: El Complemento de A es único  
Supongamos que existen dos complementos para A:  $A_1$  y  $A_2$

$$A + A_1 = 1 \quad A + A_2 = 1$$

$$A \cdot A_1 = 0 \quad A \cdot A_2 = 0$$

$$A_1 = A_1 \cdot 1 = A_1 \cdot (A + A_2) = A_1 \cdot A + A_1 \cdot A_2$$

$$A_1 = 0 + A_2 \cdot A_1$$

$$A_1 = A \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2 = (A + A_1) \cdot A_2$$

$$A_1 = A_2$$

## ...Teoremas

---

- Teorema 4: El Complemento de  $\overline{A}$  es  $A$
- Teorema 5

$$A + A = A$$

$$A \cdot A = A$$

Se demuestra por inducción comprobando exhaustivamente todas las combinaciones

## ...Teoremas

---

- Teorema 6: Absorción

$$A + A \cdot B = A$$

$$A \cdot (A + B) = A$$

Demostración:

$$A + A \cdot B = (A \cdot 1) + (A \cdot B) = A \cdot (1 + B) = A$$

## ...Teoremas

- Teorema 7: Simplificación

$$A + \bar{A} \cdot B = A + B$$

$$A \cdot (\bar{A} + B) = A \cdot B$$

Demostración:

$$A + \bar{A} = 1 \quad \text{En ambos lados se hace un AND con B}$$

$$A \cdot B + \bar{A} \cdot B = B \quad \text{En ambos lados se hace un OR con A}$$

$$A \cdot B + A + \bar{A} \cdot B = A + B$$

$$A \cdot (1 + B) + \bar{A} \cdot B = A + B$$

$$A + \bar{A} \cdot B = A + B$$

## ...Teoremas

- Teorema 8: Teorema de De Morgan

$$\overline{A + B + C + D \dots} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \dots$$

$$\overline{A \cdot B \cdot C \cdot D \dots} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \dots$$

La Demostración se hace por inducción:

$$A = B = C = \dots = 0 \quad \overline{0 + 0 + 0 \dots} = \bar{0} = 1$$

$$A = B = C = \dots = 1 \quad \overline{1 + 1 + 1 \dots} = \bar{1} = 0$$

$$\overline{1 + 0 + X} = \bar{1} = 0$$

## ...Teoremas

- El Teorema de De Morgan establece que para obtener el complemento de una expresión se debe complementar cada variable e intercambiar las operaciones OR y AND y las constantes 1 y 0.
- Ejemplo:

$$\overline{A \cdot (\overline{B} + C)} = \overline{A} + B \cdot \overline{C}$$

## 5 Funciones

---

- Una función de conmutación se define como una relación de  $P^n$  en  $P$ . Formalmente es:

$$P = \{0,1\}$$

$$f : P^n \rightarrow P$$

- Una función de conmutación se puede expresar de tres maneras:
  - En forma algebraica
  - Por una Tabla de Verdad
  - En Forma Canónica

## Tablas de Verdad

- La forma más intuitiva de representar una función de conmutación (FC) es por medio de una Tabla de Verdad.
- La Tabla de Verdad expresa el valor de salida de una función para cada combinación de entrada.
- La Tabla de Verdad permite modelar un tipo especial de sistema Digital llamado Sistema Combinacional.

## Ejemplo de Tablas de Verdad

**Forma algebraica:**  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot \overline{x_2} + x_2 \cdot \overline{x_3}$

**Tabla de Verdad:**

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

## Formas Canónicas

**Problema: Dada una Tabla de Verdad, obtener la forma algebraica**

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3$$

$$\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$$

## ...Formas Canónicas

**La forma Algebraica queda:**

$$F(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$$

**Para convertir se observa la combinación de entrada para la cual la salida toma el valor 1. La variable aparece sin complementar si vale 1 para la combinación en la cual la salida vale 1 y aparece complementada si vale 0 para la combinación en la cual la salida toma el valor 1**

## Formas Canónicas: Mintérminos

Se denomina **mintérmino** a un factor de una expresión booleana que está formado por el **AND** de todas las variables.

Una función de conmutación corresponde al **OR** de mintérminos. La función generada de esta manera se denomina **OR canónico de AND**

$$F(x_1, x_2, x_3) = OR(m_0, m_1, \dots, m_n)$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = \Sigma(m_0, m_1, \dots, m_n)$$

## ....Formas Canónicas: Mintérminos

---

**Para el ejemplo anterior:**

$$F(x_1, x_2, x_3) = OR(1,3,5,6)$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = \Sigma(1,3,5,6)$$

## Formas Canónicas: Maxtérminos

Una forma alternativa de expresar la función es examinando las combinaciones en las cuales vale 0

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

$$(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$(x_1 + \overline{x_2} + x_3)$$

$$(\overline{x_1} + x_2 + x_3)$$

$$(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})$$

## Formas Canónicas: Maxtérminos

**La función queda ahora:**

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + x_3) \cdot (\overline{x_1} + x_2 + x_3) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})$$

**Para convertir se observa la combinación de entrada para la cual la salida toma el valor 0. La variable aparece sin complementar si vale 0 para la combinación en la cual la salida vale 0 y aparece complementada si vale 1 para la combinación en la cual la salida toma el valor 0**

## Formas Canónicas: Maxtérminos

Se denomina maxtérmino expresión booleana que está formado por el OR de todas las variables.

Una función de conmutación corresponde al AND de maxtérminos. La función generada de esta manera se denomina AND canónico de OR

$$F(x_1, x_2, x_3) = AND(M_0, M_1, \dots, M_n)$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = \Pi(M_0, M_1, \dots, M_n)$$

## ...Formas Canónicas: Maxtérminos

---

**Para el ejemplo anterior:**

$$F(x_1, x_2, x_3) = AND(0, 2, 4, 7)$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = \Pi(0, 2, 4, 7)$$

## Conversión entre Formas Canónicas

**Problema:** dada una función en OR canónico de AND, obtener la forma canónica AND canónico de OR

$$F(A, B, C) = \Sigma(0,1,2,7)$$

$$\overline{F(A, B, C)} = \Sigma(3,4,5,6) = \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot B \cdot \overline{C}$$

$$\overline{\overline{F(A, B, C)}} = (A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + B + C) \cdot$$

$$(\overline{A} + B + \overline{C}) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + C)$$

$$F(A, B, C) = \Pi(3,4,5,6)$$

## Funciones Equivalentes

---

Dos funciones de conmutación son equivalentes cuando sus expansiones en formas canónicas son idénticas, es decir tienen el mismo valor de salida para las mismas combinaciones de entradas.

Una forma similar de expresar lo mismo es que dos funciones de conmutación son equivalentes cuando tienen la misma Tabla de Verdad

## ...Funciones Equivalentes

¿Cuántas funciones de  $n$  variables existen?

La respuesta a esta pregunta se encuentra fácilmente preguntando: ¿Cuántas Tablas de verdad existen con  $n$  variable?

La respuesta está en observar la columna de salida. El número de funciones es:

$$2^{2^n}$$

## Funciones de una y dos variables

---

$$F(x) = \bar{x} \quad \text{NOT}$$

$$F(x, y) = x \cdot y \quad \text{AND}$$

$$F(x, y) = x + y \quad \text{OR}$$

$$F(x, y) = \bar{x} + \bar{y} \quad \text{NAND}$$

...Funciones de una y dos variables

---

$$F(x, y) = \bar{x} \cdot \bar{y} \quad \text{NOR}$$

$$F(x, y) = x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y \quad \text{OR EXCLUSIVO}$$

$$F(x, y) = x \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y} \quad \text{AND EXCLUSIVO}$$

**Ejercicio: Construir las Tablas de Verdad de estas funciones**

## 6 Compuertas Lógicas

---

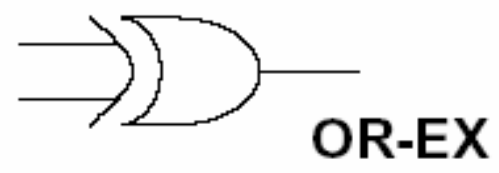
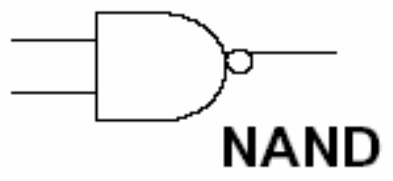
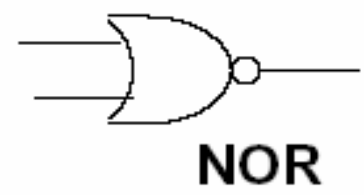
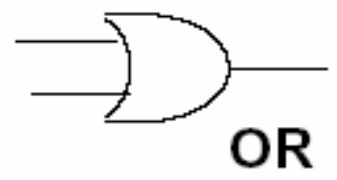
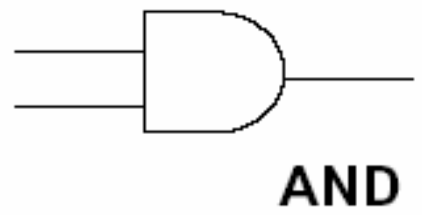
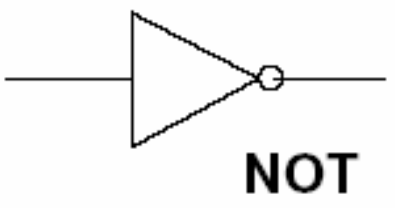
- Una forma alternativa de representar funciones es mediante Compuertas Lógicas. Las Compuertas Lógicas se construyen físicamente con electrónica integrada en sustratos de silicio.
- El éxito de los sistemas digitales se debe en gran medida al bajo costo por compuerta que se logra con este proceso y a la alta densidad de integración llegando en la actualidad a millones de compuertas en un circuito integrado cuya área no sobrepasa **1 cm<sup>2</sup>**

## ...Compuertas Lógicas

---

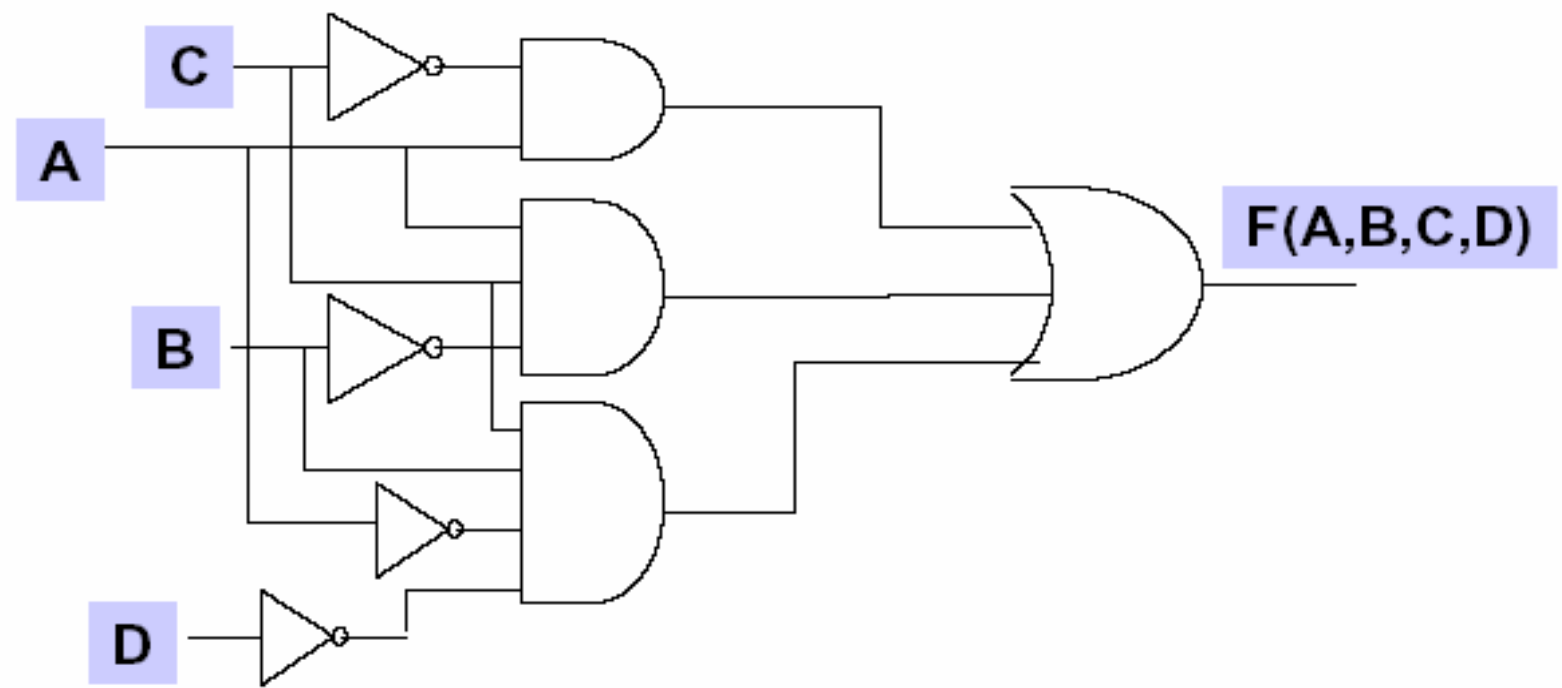
- Una red de compuertas lógicas se denomina **circuito combinacional**. Los circuitos combinacionales constituyen una parte importante de una CPU moderna

# Compuertas Lógicas



# Compuertas Lógicas: Ejemplo

$$F(A,B,C,D) = A \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot \bar{D}$$



## 7 Minimización de Funciones

- **Minimizar una función de conmutación**  
 $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es encontrar una función  $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$  equivalente a  $F$  y que contenga el mínimo número de términos y literales en una expresión OR de AND.

- **Ejemplo:**

$$\begin{aligned} F(A, B, C, D) &= \bar{A} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + A \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot C \cdot \bar{D} + A \cdot C \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot D \\ &= (\bar{A} + A) \cdot \bar{C} \cdot \bar{D} + (\bar{A} + A) \cdot C \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot D \\ &= \bar{C} \cdot \bar{D} + C \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot D = (\bar{C} + C) \cdot \bar{D} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot D = \bar{D} + \bar{A} \cdot \bar{B} \end{aligned}$$

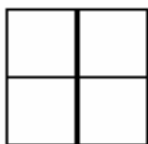
## Mapas de Karnaugh

---

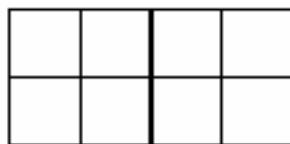
- Los mapas de Karnaugh (MK) son formas modificadas de Tablas de Verdad que permiten minimizar funciones de hasta 5 variables.
- Los MK permiten diseño rápido de circuitos combinatoriales de mínimo costo, es decir, con el mínimo número de compuertas.

## Construcción de Mapas de Karnaugh

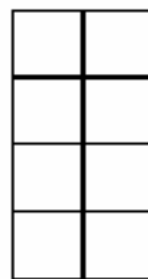
- **Para construir MK se siguen los siguientes pasos:**
  - 1) Para una función de  $n$  variables, el MK tiene  $2^n$  celdas



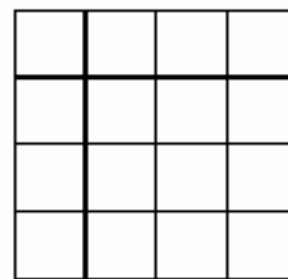
**n=2**



**n=3**



**n=3**



**n=4**

## ...Construcción de Mapas de Karnaugh

2) En las coordenadas se anotan las combinaciones de variables según código Grey

	0	1
0		
1		

**n=2**

	00	01	11	10
0				
1				

**n=3**

	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

**n=4**

## ...Construcción de Mapas de Karnaugh

- 3) Se asigna un 1 a una variable sin complementar y un 0 a una variable complementada. De esta forma cada celda queda determinada por una combinación de unos y ceros

		A	
		0	1
B	0	$\bar{A} \cdot \bar{B}$	$A \cdot \bar{B}$
	1	$\bar{A} \cdot B$	$A \cdot B$

		A	
		0	1
B	0	00	10
	1	01	11

De esta forma, cada celda queda determinada por una combinación de unos y ceros

## ...Construcción de Mapas de Karnaugh

- 4) A cada combinación de unos y ceros de una celda se le asigna el equivalente decimal de la representación binaria

	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

# Ejemplo

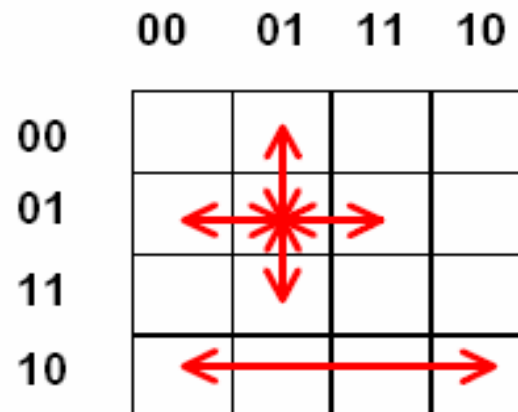
Encontrar el mapa de la función:

$$F(A, B, C, D) = \Sigma(0,1,5,6,9,13,15)$$

		<b>AB</b>			
		00	01	11	10
<b>CD</b>	00	1	0	0	0
	01	1	1	1	1
	11	0	0	1	0
	10	0	1	0	0

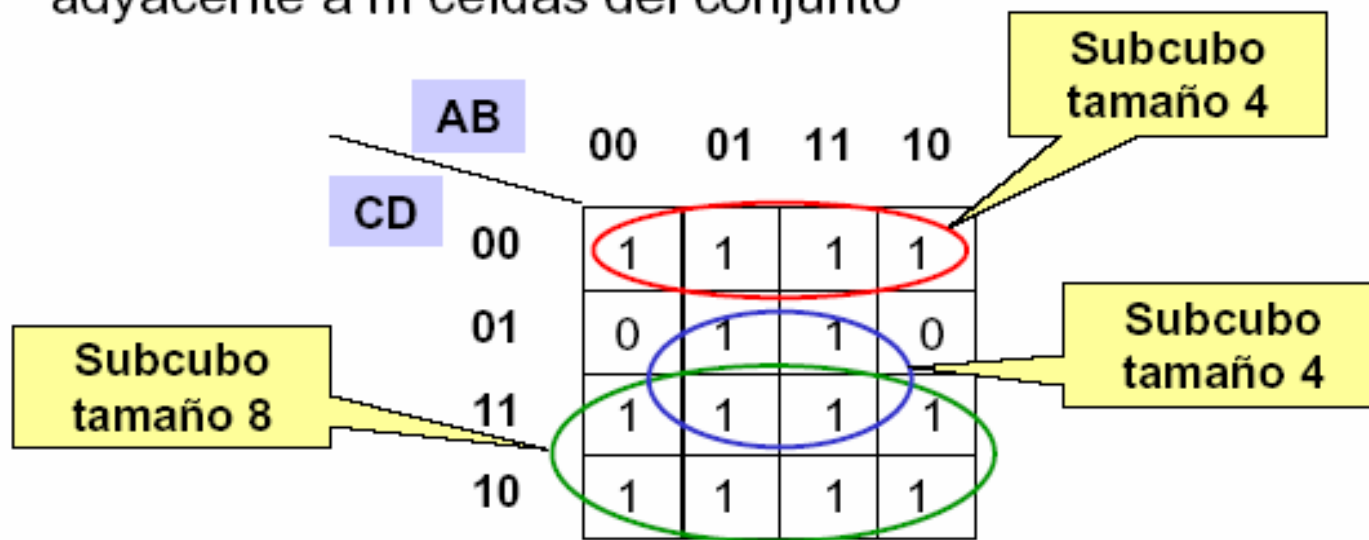
## ...Construcción de Mapas de Karnaugh

5) Dos celdas son adyacentes si difieren en una variable



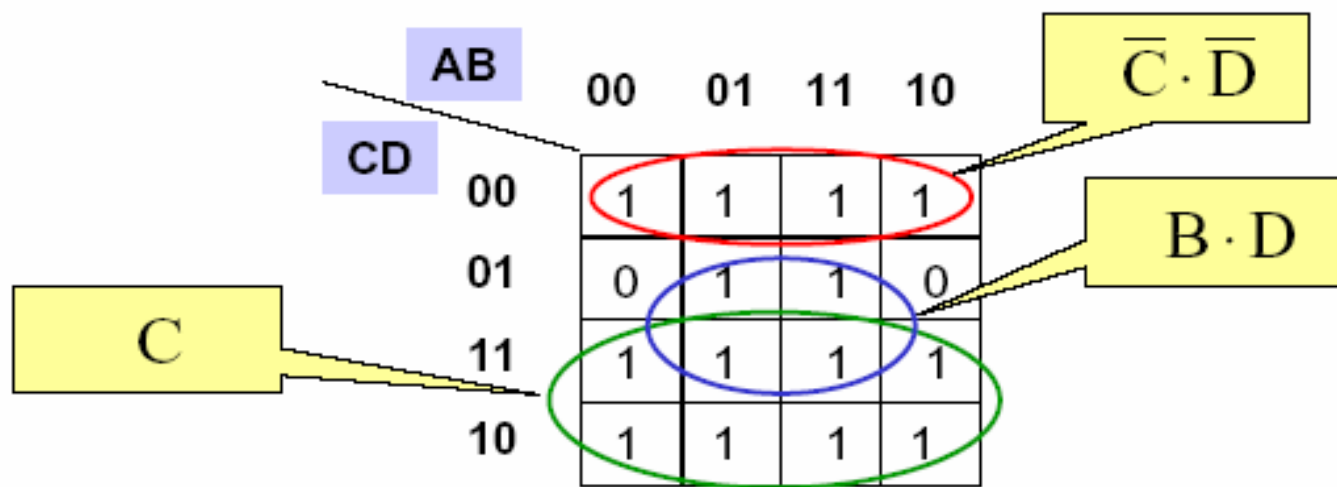
## Construcción de Mapas de Karnaugh: Subcubos

6) Un **subcubo** es un conjunto de  $2^m$  celdas con valor 1, las cuales tienen la propiedad que cada celda es adyacente a  $m$  celdas del conjunto



## Construcción de Mapas de Karnaugh: Minimización

7) Un **subcubo** se puede expresar por un término algebraico que contiene n-m literales donde n es el número de variables y  $2^m$  es el tamaño del subcubo

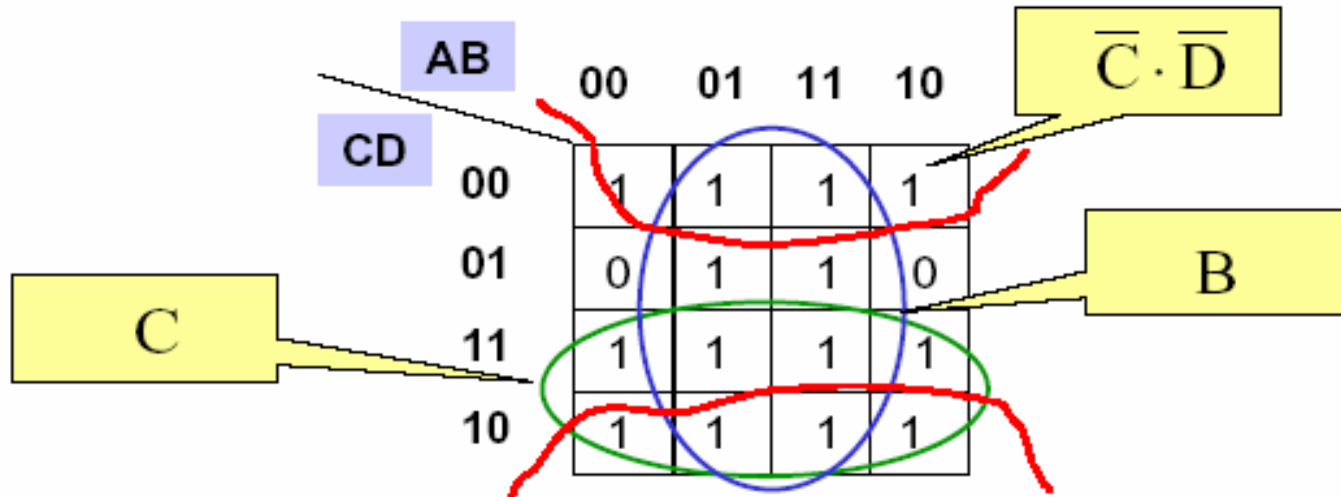


## Construcción de Mapas de Karnaugh: Minimización

---

- 8) Una función se puede expresar como la suma de los subcubos necesarios para cubrir todos los unos del MK.
- Para que una función sea *mínima*, hay que buscar el mínimo número de subcubos, o sea, cada subcubo debe ser del mayor tamaño posible.
  - El método de MK es un método manual. En términos prácticos sirve para minimizar funciones de hasta 6 variables

## Construcción de Mapas de Karnaugh: Minimización



$$F(A, B, C, D) = \bar{D} + B + C$$

## Construcción de Mapas de Karnaugh: AND de OR

Una función se puede expresar también como el producto (AND) de los subcubos necesarios para cubrir todos los ceros del MK.

**Ejemplo: Minimizar:**

$$F(A, B, C, D) = \Pi(0, 2, 5, 8, 10, 13, 14)$$

Construcción de Mapas de Karnaugh: AND de OR

$$F(A, B, C, D) = \Pi(0,2,5,8,10,13,14)$$

Para minimizar se agrupan ceros del mapa:

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	0	1	1	0
	01	1	0	0	1
	11	1	1	1	1
	10	0	1	0	0

$$F(A, B, C, D) = (B + D) \cdot (\bar{B} + C + \bar{D}) \cdot (\bar{A} + \bar{C} + D)$$